Recasages possibles : 190, 243.
Référence : Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis (p. 266-270) - Oraux X-ens Algèbre 1, Francinou, Gianella, Nicolas (p. 12-14) :

Développement Le but est de calculer pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre B_n de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments, disons $E_n = [\![1, n]\!]$. On fixe $B_0 = 1$.

Lemme 1 B_n est le nombre de partitions de E_n et on a la relation de récurrence

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Théorème 2 La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence R non nul et

$$\forall t \in]-R, R[, \; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e^{e^t - 1}.$$

En particulier, on a la formule explicite $B_n = \dfrac{1}{e} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

- *Preuve du Lemme 1* : Montrons que l'ensemble des partitions de E_n est en bijection avec l'ensemble des relations d'équivalences sur E_n. Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E_n, alors les classes d'équivalence $C_1^{(\sim)}, \dots, C_r^{(\sim)}$ associées forment une partition de E_n. On construit ainsi une application de l'ensemble $\mathcal{R}$ des relations d'équivalence sur E_n dans l'ensemble des partitions $\mathcal{P}$ de E_n :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \sim & \longmapsto & \left\{ C_1^{(\sim)}, \dots, C_r^{(\sim)} \right\} \end{array} \right.$$

Cette application est surjective car si $\{I_1, \dots, I_r\}$ est une partition de E_n, alors la relation $\sim$ sur E_n définie par $x \sim y$ si et seulement si x et y sont dans un même I_k, est une relation d'équivalence vérifiant $\Phi(\sim) = \{I_1, \dots, I_r\}$. Enfin, elle est injective car toute relation d'équivalence $\sim$ sur E_n correspond exactement à la relation associée (par le procédé précédent) à la partition formée par ses classes d'équivalence. Finalement, on a bien $B_n = \#\mathcal{R} = \#\mathcal{P}$. Le but est donc désormais de dénombrer les partitions de E_n. Pour trouver la relation de récurrence de l'énoncé, on conditionne les partitions de E_{n+1} selon le cardinal de la partie qui contient l'élément $n+1$. Plus précisément, on compte pour $k \in [\![0, n]\!]$ les partitions de E_{n+1} telles que la partie contenant l'élément $n+1$ contiennent k autres éléments. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé. Notons $\{I_1, \dots, I_r\}$ une partition quelconque de E_{n+1}, telle que $n+1 \in I_r$ et $\#I_r = k+1$. L'ensemble $\{I_1, \dots, I_{r-1}\}$ est une partition de $E_{n+1} \setminus I_r$, qui est de cardinal $n-k$. On a donc B_{n-k} choix pour $\{I_1, \dots, I_{r-1}\}$. De plus, I_r contient $n+1$ et k autres éléments de E_n, donc on a $\binom{n}{k}$ choix pour I_r. Ainsi, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, il y a $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de E_{n+1} telles que la partie contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Comme l'ensemble de toutes les partitions de E_{n+1} est la réunion disjointe (pour k variant de 0 à n) de ces partitions particulières (on a partitionné l'ensemble des partitions !), on trouve

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

où l'on a utilisé successivement le changement d'indices $k \leftarrow n-k$ et la symétrie des coefficients binomiaux.

- *Preuve du Théorème 2* : On va montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Pour cela, montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n \leqslant n!$:
  - Pour $n = 0$, on a $B_0 = 1$ et $0! = 1$, d'où $B_0 \leqslant 0!$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $B_k \leqslant k!$. On a

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{d'après le } \textbf{Lemme 1} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leqslant n! \sum_{k=0}^{n} 1 = n!(n+1) = (n+1)! \end{aligned}$$

Ceci conclut la récurrence.
On a donc montré que la suite $\left(\dfrac{B_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{B_n}{n!} 1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel, on a bien $R \geqslant 1$ et en particulier, $R > 0$.

On considère désormais l'application somme de cette série entière :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \end{array} \right.$$

D'après les propriétés sur la somme d'une série entière, f est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-R,R[$ et on a pour tout $t \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n \qquad \text{avec le changement d'indices } n \leftarrow n-1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) t^n \qquad \text{d'après le } \textbf{Lemme 1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n! B_k}{n! k! (n-k)!} \right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) t^n \end{aligned}$$

On reconnaît alors le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} t^n$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} t^n$.

Ainsi, pour tout $t \in]-R,R[$,

$$f'(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n \right) = f(t) e^t$$

Par conséquent, f est solution de l'équation différentielle homogène $y' = ye^t$, qu'on peut résoudre explicitement : les solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{e^t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que l'on a $f(t) = Ce^{e^t}$ pour tout $t \in]-R,R[$. Or, $f(0) = B_0 = 1$ donc $Ce^{e^0} = Ce = 1$, *i.e* $C = \frac{1}{e}$. Finalement, on a bien que pour tout $t \in]-R,R[$, $f(t) = \frac{1}{e} e^{e^t} = e^{e^t - 1}$.
On développe désormais à la main la fonction $t \mapsto \frac{1}{e} e^{e^t}$ en série entière en 0 grâce au développement en série entière en 0 de l'exponentielle (qui est de rayon de convergence infini donc il n'y a pas de question de convergence à se poser). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{e} e^{e^t} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^t)^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kt}}{k!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kt)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k! n!} t^n \end{aligned}$$

On souhaite appliquer le théorème de Fubini pour échanger l'ordre de sommation. On peut en effet utiliser ce théorème car pour tout $k \geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k! n!} |t|^n = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(k|t|)^n}{n!} = \frac{e^{k|t|}}{k!}$$

et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{k|t|}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{|t|})^k}{k!} = e^{e^{|t|}} < +\infty$$

Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{t^n}{n!}.$$

Alors, par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients obtenus avec les $\frac{B_n}{n!}$, et on obtient exactement

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$